

MÔ HÌNH HÀNG ĐỢI $M(t)/G/\infty$ VỚI HÀM CƯỜNG ĐỘ ĐẾN TRÊN MỘT KHOẢNG THỜI GIAN

Trần Thiện Thành

Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế

Email: thanhhtt.math@gmail.com

Ngày nhận bài: 16/11/2017; ngày hoàn thành phản biện: 12/12/2017; ngày duyệt đăng: 8/01/2018

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ (có quá trình đến là quá trình Poisson không thuần nhất) với hàm cường độ đến $\lambda(t)$ của khách hàng giới hạn trên một khoảng thời gian. Kết quả thu được là số khách hàng trong hệ thống tại thời điểm t có phân phối Poisson với tham số trung bình $m(t)$ và các đại lượng khác đo lường hệ thống, trong đó đáng chú ý là công thức xác định thời gian hệ thống dừng phục vụ t_c . Cuối cùng, một số kết quả và minh họa bằng số cho hai mô hình $M(t)/D/\infty$ và $M(t)/M/\infty$ khi hàm cường độ đến có dạng hàm bậc hai và dạng hàm sin.

Từ khóa: quá trình Poisson không thuần nhất, mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$, tốc độ đến trên một khoảng thời gian, các đại lượng đo lường hệ thống.

1. GIỚI THIỆU

Mô hình hàng đợi với quá trình đến của khách hàng là một quá trình ngẫu nhiên có tốc độ đến phụ thuộc theo thời gian đã được nhiều nhà toán học đưa ra và giải quyết. Trong đó, phần lớn các kết quả nghiên cứu cho trường hợp quá trình đến là quá trình Poisson không thuần nhất với hàm cường độ phụ thuộc theo thời gian. Điều này cũng rất tự nhiên vì khi hàm cường độ là hàm hằng thì các mô hình trên đưa về mô hình hàng đợi cơ bản mà đã được A. K. Erlang (1909) đề xuất và nhiều tác giả đưa ra (xem [7, 8]). Quá trình xây dựng và giải quyết các mô hình hàng đợi phụ thuộc theo thời gian thường gặp nhiều khó khăn và phức tạp hơn mô hình hàng đợi không phụ thuộc theo thời gian (xem [1-5]). Tuy nhiên, với mô hình hàng đợi có số điểm phục vụ là vô hạn $M(t)/G/\infty$ thì dễ giải quyết hơn trong việc xác định các đại lượng đo lường hệ thống. Chẳng hạn, bằng phương pháp xác suất và độ đo ngẫu nhiên Poisson thì ta được kết quả là số khách hàng trong mô hình $M(t)/G/\infty$ tại mỗi thời điểm có phân phối Poisson (xem [2]).

Các tính chất, đại lượng đo lường của mô hình $M(t)/G/\infty$ được quan tâm đến

Mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ với hàm cường độ đến trên một khoảng thời gian

như phân phối quá trình rời đi của khách hàng, sự tương ứng tuyến tính giữa dạng hàm cường độ đến của khách hàng và dạng hàm trung bình của số khách hàng trong hệ thống, các xấp xỉ cho hàm trung bình của số khách hàng trong hệ thống, ... cũng như các kết quả của mô hình khi thời gian phục vụ là hằng số ($G = D$), thời gian phục vụ có phân phối mũ ($G = M$), ... được đưa ra (xem [2, 3, 6]). Bên cạnh đó, một số bài báo cũng giải quyết mô hình $M(t)/G/\infty$ khi hàm cường độ đến có dạng hàm bậc hai, hàm đa thức và dạng hình sin và các ứng dụng của mô hình (xem [2, 3, 6]).

Các kết quả đề cập trên giải quyết cho mô hình hàng đợi hoạt động trên khoảng thời gian $(-\infty; +\infty)$, tức là hệ thống hoạt động liên tục, khi có khách đến thì hệ thống phục vụ. Trong thực tế, nhiều mô hình hàng đợi chỉ hoạt động trên một khoảng thời gian nhất định, sau đó ngừng hoạt động một thời gian và lại tiếp tục hoạt động chu kỳ mới. Chẳng hạn, hệ thống siêu thị chỉ phục vụ khách mua hàng từ 7h30 đến 21h30 trong mỗi ngày; bộ phận sửa chữa xe máy ở các đại lý chỉ phục vụ khách đến sửa chữa từ 7h00 đến 17h00 trong mỗi ngày, ... Với các mô hình như vậy thì hàm cường độ đến của khách hàng nhận giá trị dương trên một khoảng thời gian (a, b) nào đó. Bài báo sẽ xây dựng và giải quyết mô hình $M(t)/G/\infty$ với hàm cường độ đến có dạng trên.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Phần này trình bày một số khái niệm, giả thiết và kết quả về quá trình Poisson không thuần nhất và mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ sử dụng trong bài báo.

2.1 Quá trình Poisson không thuần nhất

Quá trình đếm $\{N(t); t > 0\}$, số lần một biến cố xảy ra, trên khoảng $[0; t)$ gọi là quá trình Poisson không thuần nhất với hàm cường độ $\lambda(t) \geq 0$ nếu thỏa mãn:

- $N(0) = 0$.
- Quá trình $N(t)$ có gia số độc lập, tức là $N(s, t)$ và $N(s', t')$ là hai biến ngẫu nhiên độc lập với $0 \leq s < t < s' < t'$.
- Với mỗi $t > 0$ thì $N(t)$ là biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số

$$n(t) = \int_0^t \lambda(u) du.$$

Với hàm cường độ $\lambda(t) = \lambda$ (hằng số) thì quá trình $N(t)$ gọi là quá trình Poisson (thuần nhất) với cường độ λ . Hàm cường độ $\lambda(t)$ trong các phần tiếp theo được giả thiết là liên tục phải và bị chặn. Ngoài ra, từ định nghĩa, ta có tính chất của quá trình Poisson không thuần nhất là với $0 \leq s < t$ thì $N(s, t)$, là số lần biến cố xảy ra trên $[s; t)$, có phân phối Poisson với tham số

$$n(s, t) = \int_s^t \lambda(u) du.$$

2.2 Mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$.

Mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$, theo ký hiệu Kendall, được mô tả như sau:

- Quá trình đến của khách hàng $N(t)$, số khách hàng đến hệ thống hàng đợi trong khoảng $[0; t)$, là một quá trình Poisson không thuần nhất với hàm cường độ $\lambda(t)$ (và $\lambda(t)$ gọi là tốc độ đến phụ thuộc thời gian t).
- Các khách hàng đến hệ thống thì được phục vụ ngay mà không cần phải đợi (số điểm phục vụ vô hạn). Thời gian phục vụ S của các khách hàng là các biến ngẫu nhiên không âm, độc lập, cùng hàm phân phối $F(x)$ không phụ thuộc t .
- Một số giả thiết khác như quá trình đến của khách hàng độc lập với thời gian phục vụ, sức chứa hệ thống là vô hạn, ...

Mô hình $M(t)/G/\infty$ có nhiều tính chất đơn giản để xác định các đại lượng đo lường hệ thống hàng đợi. Một số đại lượng đo lường mô hình hàng đợi sử dụng trong bài báo là:

- Số khách hàng trong hệ thống $Q(t)$ tại thời điểm t và số khách hàng trung bình trong hệ thống $m(t) = E[Q(t)]$ tại thời điểm t .
- Tốc độ khách hàng đến trung bình trong một đơn vị thời gian của khoảng $[0; t)$ là

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(u) du.$$

- Số khách hàng trung bình trong hệ thống trong một đơn vị thời gian của khoảng $[0; t)$ là

$$\bar{m}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t m(u) du.$$

- Xác suất hệ thống không có khách hàng tại thời điểm t là $P_0(t) = P[Q(t) = 0]$.
- Mức sử dụng của hệ thống trong khoảng $[0; t)$, là tỷ lệ phần thời gian hệ thống bận phục vụ khách hàng, là

$$U(t) = 1 - \frac{1}{t} \int_0^t P_0(u) du.$$

Với các giả thiết và ký hiệu trên và dựa vào các kết quả về mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ của Eick, Whitt trong [2-5], ta có kết quả sau:

Định lý 2.1. Mô hình $M(t)/G/\infty$ có các tính chất sau:

- a) Với mỗi $t > 0$, $Q(t)$ có phân phối Poisson với tham số

$$m(t) = \int_0^t F^c(t-u)\lambda(u)du = \int_0^t F^c(u)\lambda(t-u)du. \quad (1)$$

Mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ với hàm cường độ đến trên một khoảng thời gian

Trong đó, $F^c(x) = 1 - F(x)$.

b) Xác suất hệ thống không có khách hàng tại thời điểm t là $P_0(t) = e^{-m(t)}$.

Chứng minh. Phần a) xem Định lý 1 trong [2] với chú ý là mô hình hàng đợi bắt đầu hoạt động từ thời điểm 0 có tốc độ đến $\lambda(t) = 0$ với $t \leq 0$ và phần b) suy ra từ định nghĩa phân phối Poisson. $\square$

Một lưu ý từ kết quả của định lý 2.1 là quá trình $Q(t)$ không phải là một quá trình Poisson (thuần nhất, không thuần nhất) do không có tính chất gia số độc lập. Ngoài ra, trong trường hợp tốc độ đến là hằng số, dựa vào định lý 2.1 và định nghĩa, ta dễ dàng đưa ra kết quả về các đại lượng đo lường mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ ở trạng thái ổn định (xem [7]).

3. KẾT QUẢ

Trong phần này, ta quan tâm mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ vận hành như sau: các khách hàng đến hệ thống trong khoảng thời gian $[0; t_a)$ và đến thời điểm $t_c \geq t_a$ thì hệ thống phục vụ xong các khách hàng còn lại trong hệ thống. Ở đây, khoảng $[0; t_c]$ có thể xem là khoảng thời gian làm việc của hệ thống hàng đợi mà tất cả các khách hàng đến trong khoảng $[0; t_a) \subset [0; t_c]$ đều được phục vụ xong. Chẳng hạn:

- Trong một ngày, các khách hàng vào một hệ thống siêu thị từ 7h30 đến 21h30, nếu sau thời gian 21h30 vẫn còn khách hàng mua đang thanh toán thì các quầy thanh toán vẫn hoạt động cho đến khi khách cuối cùng được thanh toán xong, chẳng hạn, lúc 22h00.
- Các cuộc gọi điện thoại đến một tổng đài tư vấn khách hàng từ 6h00 đến 23h00 và tổng đài chỉ dừng hoạt động khi tư vấn xong các cuộc gọi đến trong khoảng thời gian trên.

Với mô hình $M(t)/G/\infty$ như trên thì quá trình đến $N(t)$ với tốc độ khách hàng đến có dạng sau:

$$\lambda(t) = \begin{cases} a(t) & \text{nếu } 0 < t < t_a, \\ 0 & \text{nếu } t_a \leq t \leq t_c. \end{cases} \quad (2)$$

trong đó hàm $a(t) > 0$.

Khi đó, từ (1), số khách hàng trong hệ thống $Q(t)$ tại thời điểm t có phân phối Poisson với tham số

$$m(t) = \begin{cases} \int_0^t F^c(t-u)a(u)du & \text{nếu } 0 < t < t_a, \\ \int_0^{t_a} F^c(t-u)a(u)du & \text{nếu } t_a \leq t \leq t_c. \end{cases} \quad (3)$$

Nhận xét. Số khách hàng trung bình trong hệ thống $m(t)$ trong (3) tại thời điểm $t \in [t_a; t_c]$ chỉ phụ thuộc vào thời gian phục vụ S (vì từ thời điểm t_a trở đi thì khách hàng không còn vào). Số khách hàng trong hệ thống từ thời điểm t_a trở đi gồm các khách hàng đến trước thời điểm t_a và chưa được phục vụ xong.

Trong mô hình này, các đại lượng đo lường hệ thống như số khách hàng đến trung bình $n(t)$, tốc độ đến trung bình $\bar{\lambda}(t)$, số khách hàng trung bình trong hệ thống $\bar{m}(t)$, mức sử dụng của hệ thống $U(t)$, ... trong khoảng $[0; t]$ có thể xác định được nếu biết hàm $\lambda(t)$ trong (2) và $m(t)$ trong (3). Bên cạnh đó, ta có kết quả cần quan tâm trong mô hình này như sau:

Định lý 3.1. Mô hình $M(t)/G/\infty$ với hàm $\lambda(t)$ dạng (2) có tính chất sau:

- a) $m(t)$ là hàm giảm trên đoạn $[t_a; t_c]$.
- b) Xác suất hệ thống không còn khách hàng $P_0(t_c)$ tại thời điểm t_c thỏa mãn

$$t_c = m^{-1}[-\ln P_0(t_c)]. \quad (4)$$

Chứng minh. a) Với $t_a \leq t \leq t_c$ và từ (3), ta có đạo hàm

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_0^{t_a} \frac{dF^c(t-u)}{dt} a(u) du.$$

Do hàm phân phối $F(x)$ không giảm nên $F^c(x)$ là hàm không tăng nên $\frac{dF^c(x)}{dx} \leq 0$. Hơn nữa $a(t) \geq 0$ nên suy ra $\frac{dm(t)}{dt} \leq 0$. Do đó $m(t)$ là hàm giảm.

b) Từ định lý 2.1, ta có $P_0(t_c) = e^{-m(t_c)}$ nên suy ra $m(t_c) = -\ln P_0(t_c)$. Theo a) thì $m(t)$ là hàm giảm trên đoạn $[t_a; t_c]$ và tồn tại hàm ngược m^{-1} nên suy ra (4). $\square$

Nhận xét. Dựa vào công thức (4) trong định lý 3.1, ta có thể xác định thời điểm t_c nếu cho trước xác suất $P_0(t_c)$. Trong thực tế, bài toán này có ý nghĩa trong việc xác định khoảng thời gian mô hình hàng đợi cần phục vụ các khách hàng còn lại sau khi đến thời điểm quy định khách hàng đến t_a .

Ví dụ 3.1: Xét mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ với tốc độ đến là

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2(8t - t^2) & \text{nếu } 0 < t < 8, \\ 0 & \text{nếu } 8 \leq t \leq 9. \end{cases}$$

(quy định khách hàng đến trong khoảng $(0; 8)$ giờ và hệ thống dừng phục vụ lúc 9 giờ). Thời gian phục vụ S mỗi khách hàng là 1,2 giờ.

Ta có hàm phân phối thời gian phục vụ $F(x) = 0$ nếu $x \leq 1,2$ và $F(x) = 1$ nếu $x > 1,2$. Từ (3) ta tính được, với $t \geq 8$ thì $m(t) = \frac{2}{3}(t - 1,2)^3 - 8(t - 1,2)^2 + \frac{512}{3}$. Do đó, xác suất hệ thống không còn khách hàng lúc 9 giờ là $P_0(9) = e^{-m(9)} \approx 0,73$. Điều này cho thấy nếu quy định hệ thống dừng phục vụ lúc 9 giờ thì khả năng còn khách chưa phục vụ xong vẫn còn cao. Để khắc phục và đảm bảo khách hàng gần như được phục vụ xong, chẳng hạn, ta chọn xác suất $P_0(t_c) = 0,98$ thì theo (4), thời điểm t_c là nghiệm

Mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ với hàm cường độ đến trên một khoảng thời gian

của phương trình $m(t_c) = -\ln P_0(t_c)$ với $8 \leq t_c \leq 9,2$, suy ra $t_c \approx 9,15$. Vậy nếu quy định hệ thống dừng phục vụ lúc 9,15 giờ thì gần như khách được phục vụ xong (xác suất 0,98), điều này cũng có nghĩa là nếu quy định khách đến hệ thống trước 8 giờ thì hệ thống cần phục vụ thêm ít nhất 1,15 giờ nữa.

Tiếp theo trong phần này, ta sẽ đưa ra một số kết quả và ví dụ của mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ đề cập ở trên trong một số trường hợp cụ thể như sau:

- Thời gian phục vụ S là hằng số $D > 0$ (gọi là mô hình $M(t)/D/\infty$) và S có phân phối mũ $\text{Exp}(\mu)$ với $\mu > 0$ (gọi là mô hình $M(t)/M/\infty$).
- Tốc độ khách hàng đến là hàm dạng hàm bậc hai, dạng hình sin.

Định lý 3.2. Xét mô hình $M(t)/D/\infty$ với hàm $\lambda(t)$ dạng (2) sao cho $0 < D \leq t_a \leq t_c < t_a + D$. Khi đó, với mỗi $t \in (0; t_c]$ thì $Q(t)$ có phân phối Poisson với tham số

$$m(t) = \begin{cases} \int_0^t a(u) du & \text{nếu } 0 < t < D, \\ \int_{t-D}^{\min\{t, t_a\}} a(u) du & \text{nếu } D \leq t \leq t_c. \end{cases} \quad (5)$$

Chứng minh. Thời gian phục vụ là hằng số D nên suy ra $F^c(x) = 1$ nếu $x \leq D$ và $F^c(x) = 0$ nếu $x > D$ và từ (3), ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. a) Vì thời gian phục vụ là hằng số D nên nếu $t_c \geq t_a + D$ thì hệ thống chắc chắn phục vụ xong các khách hàng.

b) Nếu các khách hàng đến tại thời điểm $t \in (0; D)$ thì chắc chắn các khách hàng này được phục vụ xong sau thời điểm D . Do đó, số khách hàng trong hệ thống $Q(t)$ tại thời điểm t bằng số khách hàng đến $N(t)$ trong khoảng $[0; t)$. Điều này có nghĩa với $t \in (0; D)$ thì $m(t) = n(t) = \int_0^t a(u) du$.

Định lý 3.3. Xét mô hình $M(t)/M/\infty$ với hàm $\lambda(t)$ dạng (2). Khi đó, với mỗi $t \in (0; t_c]$ thì $Q(t)$ có phân phối Poisson với tham số

$$m(t) = \int_0^{\min\{t, t_a\}} e^{-\mu(t-u)} a(u) du. \quad (6)$$

Chứng minh. Thời gian phục vụ có phân phối mũ $\text{Exp}(\mu)$ nên suy ra $F^c(x) = e^{-\mu x}$ với $x > 0$ và từ (3), ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Với $t \in [t_a; t_c]$, ta có $m(t) = e^{-\mu(t-t_a)} m(t_a) = F^c(t - t_a) m(t_a)$. Mặt khác, ta xét tình huống sau: Theo kết quả định lý 3.3, số khách hàng trong hệ thống $Q(t_a)$ tại thời điểm t_a có phân phối Poisson với tham số $m(t_a)$. Giả sử ta xem các khách hàng này bắt đầu được phục vụ tại thời điểm t_a (thực tế thì một số khách hàng đã đến trước thời điểm t_a và đang còn phục vụ). Xác suất mỗi khách hàng này chưa được phục vụ xong tại thời điểm $t > t_a$ là $F^c(t - t_a)$. Do đó, theo tính chất tách phân phối Poisson thì

số khách hàng trong hệ thống $Q(t)$ tại thời điểm t có phân phối Poisson với tham số $F^c(t - t_a)m(t_a)$. Điều này cho thấy tính không nhớ của thời gian phục vụ có phân phối mũ là tại thời điểm t_a (khách hàng không được vào nữa) thì các khách hàng đang ở trong hệ thống có thể được xem như bắt đầu được phục vụ dù trước đó đang được phục vụ.

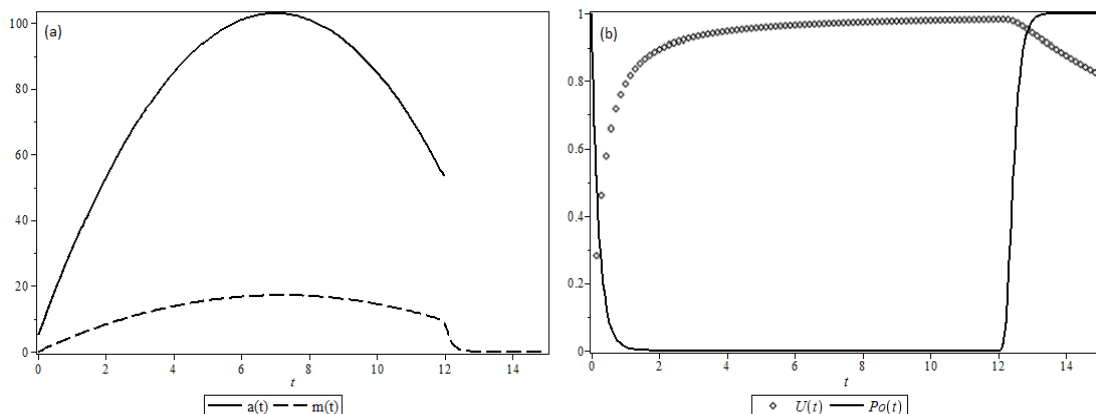
Tốc độ đến của khách hàng xét trong phần này có xu hướng tăng dần trong khoảng thời đầu, sau đó giảm dần trong khoảng thời gian cuối như dạng hàm bậc hai, dạng hình sin. Để đơn giản các công thức và tính toán, ta minh họa ví dụ cụ thể mô hình $M(t)/D/\infty$ và $M(t)/M/\infty$ với các dạng tốc độ đến nói trên. Các tính toán và đồ thị được thực hiện trên Maple.

Ví dụ 3.2: (Game online). Một hệ thống trò chơi online xếp hạng cho phép người chơi đăng nhập và tham gia chơi trong khoảng $(0; 12)$ giờ. Giả sử mô hình là $M(t)/M/\infty$ với tốc độ người chơi đăng nhập chơi là $a(t) = 5 + 28t - 2t^2$ với $0 < t < 12$. Thời gian chơi trò chơi ở mỗi lần đăng nhập có phân phối mũ với trung bình 10 phút.

Áp dụng kết quả (6) trong định lý 3.3 với các tham số $t_a = 12; \mu = 6$ và hàm $a(t)$ như trên, ta có số người chơi trung bình tại thời điểm t là:

$$m(t) = \begin{cases} \frac{1}{27}(1 + 129t - 9t^2 - e^{-6t}) & \text{nếu } 0 < t < 12, \\ \frac{1}{27}(253e^{72-6t} - e^{-6t}) & \text{nếu } 12 \leq t \leq t_c. \end{cases}$$

Với hàm $\lambda(t)$, $m(t)$ và định nghĩa trong phần 2.1, 2.2, ta xác định được các hàm $\bar{\lambda}(t)$, $\bar{m}(t)$, $P_0(t)$, $U(t)$ và được minh họa đồ thị trong hình 3.1.



Hình 3.1. (a) Đồ thị tốc độ đăng nhập $a(t)$, số người chơi trung bình $m(t)$.

(b) Đồ thị xác suất hệ thống không người chơi $P_0(t)$ và mức sử dụng hệ thống $U(t)$.

Một số giá trị đo lường hệ thống trên như sau:

- Tốc độ đăng nhập trung bình trong khoảng $(0; 12)$ là $\bar{\lambda}(12) = 77$ lần đăng nhập/giờ.

Mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ với hàm cường độ đến trên một khoảng thời gian

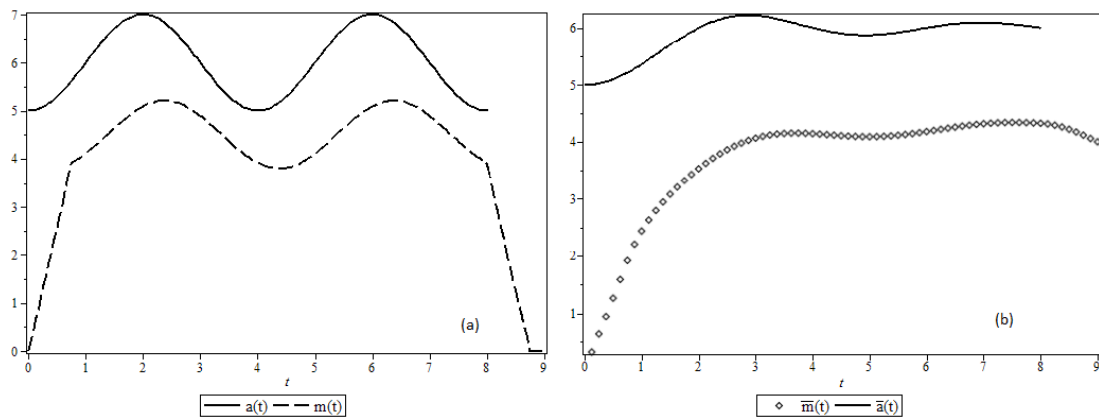
- Số người chơi trung bình trong hệ thống trong khoảng $(0; 12)$ là $\bar{m}(12) \approx 12,7$ người chơi/giờ.
- Dựa vào đồ thị (b) hình 3.1, xác suất hệ thống không có người chơi giảm nhanh ở 1 giờ đầu, sau đó duy trì ở mức rất nhỏ từ 1 giờ đến 12 giờ, sau đó tăng nhanh sau 12 giờ. Cụ thể ở 12 giờ là $P_0(12) \approx 8,5 \cdot 10^{-5}$ và ở 13 giờ là $P_0(13) \approx 0,977$. Do đó có thể nhận định hệ thống trên sau khoảng 13-14 giờ thì không còn người chơi.
- Mức sử dụng ở hình 3.1b cho thấy hệ thống gần như luôn hoạt động với tỷ suất trên 90%, chẳng hạn trong khoảng $(0; 12)$ giờ thì hệ thống phục vụ cho người chơi chiếm $U(12) \approx 98,2\%$ phần thời gian.

Ví dụ 3.3. (Tổ chức thi học phần online) Một học phần được tổ chức thi online trong một số ngày với thời gian cho phép thí sinh đăng nhập và thi mỗi ngày trong khoảng $(0; 8)$ giờ. Giả sử mô hình tổ chức thi là $M(t)/D/\infty$ với tốc độ thí sinh đăng nhập để làm bài thi là $a(t) = 5 \left[1 + 0,4 \sin^2 \left(\frac{\pi t}{4} \right) \right]$ với $0 < t < 8$. Thời gian làm bài thi của mỗi thí sinh là 45 phút.

Áp dụng kết quả (5) trong định lý 3.2 với các tham số $t_a = 8; D = 0,75$ và hàm $a(t)$ như trên thì số thí sinh làm bài thi $Q(t)$ tại thời điểm t có phân phối Poisson với tham số

$$m(t) = \begin{cases} 6t - \frac{2}{\pi} \sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) & \text{nếu } 0 < t < \frac{3}{4}, \\ \frac{9}{2} - \frac{2}{\pi} \left[\sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi t}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) \right] & \text{nếu } \frac{3}{4} \leq t < 8, \\ \frac{105}{2} - 6t + \frac{2}{\pi} \sin \left(\frac{\pi t}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) & \text{nếu } 8 \leq t \leq t_c < \frac{35}{4}. \end{cases}$$

Từ hàm $\lambda(t), m(t)$ ta xác định được các hàm $\bar{\lambda}(t)$ (hay $\bar{a}(t)$), $\bar{m}(t)$, $P_0(t)$ và được minh họa đồ thị trong hình 3.2.



Hình 3.2. (a) Đồ thị tốc độ đăng nhập $a(t)$, số thí sinh làm bài trung bình $m(t)$.
(b) Đồ thị tốc độ đăng nhập trung bình $\bar{a}(t)$ và số thí sinh làm bài trung bình $\bar{m}(t)$ trên 1 đvtg.

Một số giá trị đo lường hệ thống trên như sau:

- Ở hình 3.2a cho thấy số thí sinh làm bài thi trung bình $m(t)$ tại các thời điểm cũng có dạng hình sin như tốc độ đăng nhập $a(t)$ (ngoại trừ khoảng đầu, khoảng cuối).
- Dựa vào đồ thị (b) hình 3.2, ta thấy tốc độ đăng nhập trung bình trên 1 giờ trong các khoảng thời gian biến thiên từ 5 – 6 thí sinh/giờ. Chẳng hạn, tốc độ đăng nhập trung bình trong khoảng (0; 8) là $\bar{a}(8) = 6$ thí sinh đăng nhập/giờ.
- Số thí sinh làm bài thi trung bình trong hệ thống trong khoảng (0; 8) là $\bar{m}(8) \approx 4,32$ thí sinh/giờ.
- Theo nhận xét trong định lý 3.2 và với thời gian làm bài quy định là 0,75 giờ thì hệ thống chắc chắn sẽ dừng hoạt động tại thời điểm 8,75 giờ. Do đó, ta có thể chọn thời điểm $t_c = 8,75$ một cách đơn giản.

Trong thực tế, nếu ta ước lượng được tốc độ đến cũng như phân phối thời gian phục vụ trong mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ như đề cập trên thì sẽ phân tích và đánh giá được mô hình như trong các ví dụ trên.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã đưa ra một số kết quả và nhận định cho mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ với hàm cường độ đến của khách hàng giới hạn trên một khoảng thời gian nhất định. Trong đó, tác giả đưa đến cách xác định thời điểm hệ thống hàng đợi dừng phục vụ dựa trên xác suất hệ thống không còn khách hàng. Bên cạnh đó là một số minh họa cụ thể cho hai mô hình cơ bản $M(t)/D/\infty$, $M(t)/M/\infty$ với dạng hàm cường độ đến thường gặp trong thực tế. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo của bài báo là:

- Mở rộng mô hình hàng đợi đã đề cập khi thời gian phục vụ phụ thuộc theo thời gian.
- Tìm hiểu và nghiên cứu các mô hình phức tạp hơn như $M(t)/G/c$, $M(t)/G/c/K$, ... với hàm cường độ đến đã đề cập.
- Nghiên cứu mạng lưới hàng đợi với các trạm phục vụ liên kết đến mô hình đề cập trong bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. L. Green, P. Kolesar (1991). The pointwise stationary approximation for queues with nonstationary arrivals, *Management Sci.*, Vol. 37, No. 1, pp. 84-97.
- [2]. S. G. Eick, W. A. Massey, W. Whitt (1991). The physics of the $M_t/G/\infty$ queue, *Operations Research*, Vol. 41, No. 4, pp. 731-742.

Mô hình hàng đợi $M(t)/G/\infty$ với hàm cường độ đến trên một khoảng thời gian

- [3]. S. G. Eick, W. A. Massey, W. Whitt (1993). $M_t/G/\infty$ Queues with Sinusoidal Arrival Rates, *Management Sci.*, Vol. 39, No. 2, pp. 241-252.
- [4]. W. A. Massey, W. Whitt (1993). Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input. *Queueing Systems*, Vol. 13, Iss. 1-3, pp. 183-250.
- [5]. W. Massey (2002). The Analysis of Queues with Time-Varying Rates for Telecommunication Models. *Telecommunication Systems*, Vol. 21, Iss. 2-4, pp. 173-204.
- [6]. W. Whitt (2014). The steady-state distribution of the $M_t/M/\infty$ queue with a sinusoidal arrival rate function. *Operations Research Letters*, Vol. 42, Iss. 5, pp. 311-318.
- [7]. I. Adan, J. Resing (2015). *Queueing Systems*, Eindhoven University of Technology, pp. 1-182, Website: <http://www.win.tue.nl/~iadan/queueing.pdf>.
- [8]. G. L. Gallager (2011). *Discrete Stochastic Processes*, 2nd ed., Chap. 2, pp. 69-102, Website: <https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-262-discrete-stochastic-processes-spring-2011/course-notes/>.

$M(t)/G/\infty$ QUEUES WITH ARRIVAL RATE FUNCTIONS ON A BOUNDED TIME INTERVAL

Tran Thien Thanh

Faculty of Mathematics, University of Sciences, Hue University

Email:thanhtt.math@gmail.com

ABSTRACT

This paper deals with the study of $M(t)/G/\infty$ queues (having a nonhomogeneous Poisson arrival process) with customers arrive to the system with rate functions $\lambda(t)$ on a bounded time interval. Results showed that the number of customers in the queue at time t having a Poisson distribution with the parameter $m(t)$ and other performance measures of the system, where a noticeable formula is to determine the time t_c at which the system stops working. Finally, some results and numerical illustrations for $M(t)/D/\infty$ queues and $M(t)/M/\infty$ queues with quadratic and sinusoidal arrival rate functions are obtained.

Keywords: arrival rate on a bounded time interval, $M(t)/G/\infty$ queue, nonhomogeneous Poisson process, queue, performance measures of the system.



Trần Thiện Thành sinh ngày 01/01/1983 tại Huế. Năm 2005, ông tốt nghiệp cử nhân chuyên ngành Toán học tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế và nhận bằng thạc sĩ chuyên ngành Xác suất thống kê toán học tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế năm 2008. Từ năm 2006 cho đến nay, ông giảng dạy tại Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế.

Lĩnh vực nghiên cứu: Tổng ngẫu nhiên, Mô hình xác suất và thống kê ứng dụng.

